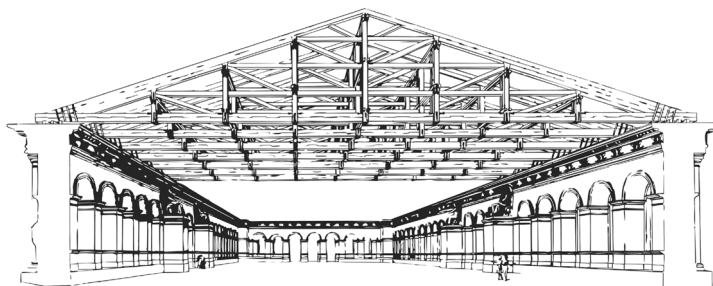


Filippo Cucco

# LEZIONI DI STATICA

**CONCETTI DI BASE  
ALLA MECCANICA DELLE STRUTTURE**

**SECONDA EDIZIONE**



**SOFTWARE INCLUSO**

STRUTTURE INTELAIATE PIANE E GEOMETRIA DELLE MASSE

F.A.Q. (domande e risposte sui principali argomenti)



**GRAFILL**

Filippo Cucco  
**LEZIONI DI STATICA**

ISBN 13 978-88-8207-548-4  
EAN 9 788882 075484

Quaderni, 18  
Seconda edizione, febbraio 2014

Cucco, Filippo <1951->  
Lezioni di statica / Filippo Cucco. – 2. ed. – Palermo : Grafill, 2014.  
(Quaderni ; 18)  
ISBN 978-88-8207-548-4  
1. Statica.  
531.12 CDD-22 SBN Pal0265843  
CIP – Biblioteca centrale della Regione siciliana "Alberto Bombace"

Il presente volume è **disponibile anche in versione eBook** (formato \*.pdf) compatibile con **PC, Macintosh, Smartphone, Tablet, eReader**.

Per l'acquisto di eBook e software sono previsti pagamenti con conto corrente postale, bonifico bancario, carta di credito e paypal. Per i pagamenti con carta di credito e paypal è consentito il download immediato del prodotto acquistato.

Per maggiori informazioni inquadra con uno smartphone o un tablet il codice QR sottostante.



I lettori di codice QR sono disponibili gratuitamente su Play Store, App Store e Market Place.

© **GRAFILL S.r.l.**

Via Principe di Palagonia, 87/91 – 90145 Palermo  
Telefono 091/6823069 – Fax 091/6823313  
Internet <http://www.grafill.it> – E-Mail [grafill@grafill.it](mailto:grafill@grafill.it)

Finito di stampare nel mese di febbraio 2014  
presso **Tipolitografia Luxograph S.r.l.** Piazza Bartolomeo Da Messina, 2/e – 90142 Palermo

Tutti i diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica e di riproduzione sono riservati. Nessuna parte di questa pubblicazione può essere riprodotta in alcuna forma, compresi i microfilm e le copie fotostatiche, né memorizzata tramite alcun mezzo, senza il permesso scritto dell'Editore. Ogni riproduzione non autorizzata sarà perseguita a norma di legge. Nomi e marchi citati sono generalmente depositati o registrati dalle rispettive case produttrici.

**INDICE**

<b>1.0. RICHIAMI DI ALGEBRA DELLE MATRICI</b> .....	p.	1
1.1. Matrici rettangolari.....	"	1
1.2. Matrici quadrate .....	"	2
1.2.1. Determinante .....	"	2
1.2.2. Complemento algebrico.....	"	3
1.3. Algebra delle matrici.....	"	3
1.3.1. Trasposta di una matrice.....	"	4
1.3.2. Matrice unità e matrice nulla.....	"	4
1.3.3. Somma di matrici .....	"	5
1.3.4. Differenza di matrici.....	"	5
1.3.5. Prodotto di matrici.....	"	5
1.3.6. Divisione di matrici .....	"	6
1.3.7. Esercizi da svolgere.....	"	9
1.4. Sistemi lineari di equazioni.....	"	10
1.4.1. Soluzione di un sistema determinato.....	"	10
1.4.2. Sistemi impossibili .....	"	12
1.4.3. Sistemi indeterminati.....	"	13
1.4.4. Sistemi "travestiti".....	"	14
1.4.5. Uso delle matrici nella soluzione dei sistemi di equazioni lineari.....	"	16
<b>2.0. STABILITÀ E RESISTENZA</b> .....	"	19
<b>3.0. ELEMENTI DI TEORIA DEI VETTORI</b> .....	"	23
3.1. Somma grafica.....	"	26
3.2. Somma analitica .....	"	26
3.3. Prodotto scalare.....	"	27
3.4. Tipi di vettori.....	"	28
3.5. Somma di cursori .....	"	29
3.6. Somma di vettori applicati .....	"	29
3.7. Proprietà dei poligoni funicolari .....	"	30
3.8. Momento di una forza .....	"	30
3.9. La coppia.....	"	33
3.10. Principio di equivalenza e di riducibilità.....	"	34
<b>4.0. RICHIAMI DI MECCANICA</b> .....	"	35
4.1. Condizioni cinematiche e meccaniche di quiete .....	"	37
<b>5.0. I VINCOLI</b> .....	"	39
5.1. I vincoli nel piano (classificazione cinematica) .....	"	39
5.1.1. I vincoli semplici.....	"	39
5.1.1.1. Il carrello .....	"	40
5.1.1.2. La biella.....	"	40
5.1.1.3. Il quadripendolo .....	"	41

5.1.2.	I vincoli doppi.....	p.	42
5.1.2.1.	La cerniera fissa.....	"	42
5.1.2.2.	L'incastro scorrevole .....	"	42
5.1.3.	I vincoli tripli.....	"	43
5.1.3.1.	L'incastro perfetto .....	"	43
5.2.	I vincoli nello spazio (classificazione cinematica).....	"	44
5.3.	I vincoli nel piano (classificazione meccanica).....	"	45
5.3.1.	Vincoli diffusi e vincoli puntiformi .....	"	45
5.3.2.	Reazioni del carrello, della biella e del quadripendolo .....	"	45
5.3.3.	Reazioni della cerniera, dell'incastro scorrevole e perfetto "		46
<b>6.0.</b>	<b>CALCOLO DELLE REAZIONI DEI VINCOLI.....</b>	"	47
6.1.	Classificazione dei corpi vincolati.....	"	47
6.2.	Calcolo delle forze reattive in una trave isostatica.....	"	49
6.3.	Calcolo delle forze reattive in una trave ipostatica .....	"	51
6.4.	Calcolo delle forze reattive in una trave iperstatica .....	"	53
6.5.	Calcolo delle forze reattive in una trave ipercinestatica .....	"	54
6.6.	Algoritmo per il calcolo delle reazioni.....	"	55
6.7.	Sistemi di travi .....	"	57
6.8.	Forze distribuite e forze concentrate .....	"	58
6.9.	Complessità di natura geometrica .....	"	59
6.9.1.	I teoremi sui triangoli rettangoli della trigonometria .....	"	60
6.9.2.	Teorema dei lati paralleli o ortogonali.....	"	62
6.10.	Soluzione di esempi complessi .....	"	63
6.10.1.	Esempio 1.6.....	"	63
6.10.2.	Esempio 2.6.....	"	65
6.11.	Il Principio dei Lavori Virtuali .....	"	67
6.11.1.	Gradi di libertà e Parametri di Lagrange .....	"	70
6.11.2.	Rotazioni infinitesime: semplificazioni .....	"	72
6.11.3.	Il Teorema di Eulero per i moti rigidi e infinitesimi nel piano .....	"	72
6.11.4.	Componente di spostamento a causa di una rotazione rigida .....	"	73
6.11.5.	Equazioni di equilibrio in forma matriciale scritte tramite il P.LL.VV.....	"	77
<b>7.0.</b>	<b>I VINCOLI INTERNI .....</b>	"	83
7.1.	Classificazione cinematica dei vincoli interni .....	"	84
7.2.	Classificazione meccanica dei vincoli interni .....	"	85
7.3.	Vincoli interni anomali.....	"	86
7.3.1.	La cerniera interna multipla.....	"	86
7.3.2.	L'incastro interno come vincolo di continuità.....	"	87
<b>8.0.</b>	<b>CALCOLO DELLE REAZIONI DEI VINCOLI ESTERNI ED EQUAZIONI PER I MOTI RELATIVI .....</b>	"	89
8.1.	Algoritmo generale per il calcolo delle reazioni dei vincoli esterni ..	"	95
8.2.	Esempio 1.8.....	"	96

8.3.	Esempio 2.8.....	p.	100
8.4.	Esempio 3.8.....	"	106
8.5.	Esempio 4.8.....	"	107
8.6.	Particolari disposizioni dei vincoli che danno inefficacia.....	"	111
<b>9.0.</b>	<b>REAZIONI DEI VINCOLI INTERNI .....</b>	"	113
<b>10.0.</b>	<b>RICHIAMI DI ANALISI E DI GEOMETRIA ANALITICA .....</b>	"	125
10.1.	Derivata prima di una funzione.....	"	125
10.1.1.	Derivata prima come limite del rapporto incrementale.....	"	126
10.2.	Punti di stazionarietà di una funzione .....	"	127
10.3.	L'integrale indefinito .....	"	128
10.4.	L'integrale definito .....	"	130
<b>11.0.</b>	<b>DIAGRAMMI DELLE CARATTERISTICHE DELLA SOLLECITA- ZIONE IN TRAVI SEMPLICI.....</b>	"	131
11.1.	Disegno dei diagrammi senza l'ausilio diretto delle funzioni.....	"	140
11.1.1.	Trave a mensola con carico concentrato all'estremità.....	"	140
11.1.2.	Trave a mensola con coppia concentrata all'estremità.....	"	141
11.1.3.	Trave a mensola con carico uniforme.....	"	142
11.1.4.	Trave a mensola con carico triangolare.....	"	144
11.1.5.	Trave a mensola con carico triangolare specchiato.....	"	145
11.1.6.	Trave a mensola con carico trapezio .....	"	147
11.1.7.	Trave a mensola con carico trapezio specchiato.....	"	149
11.1.8.	Trave a mensola con carico parabolico .....	"	151
11.1.9.	Vincoli interni singolari, un aiuto nel disegno dei diagrammi.....	"	152
11.1.10.	Trave con cerniere interne .....	"	155
11.1.11.	Trave con bipendolo interno.....	"	157
11.1.12.	Legame tra deformata e momento flettente.....	"	159
<b>12.0.</b>	<b>DIAGRAMMI IN STRUTTURE COMPLESSE .....</b>	"	161
12.1.	Regole di raccordo .....	"	165
12.1.1.	Forze concentrate.....	"	166
12.1.2.	Coppie concentrate .....	"	168
12.1.3.	Esempio 1.12 .....	"	171
12.1.4.	Esempio 2.12 .....	"	173
12.1.5.	Esempio 3.12 .....	"	174
12.1.6.	Esempio 4.12 .....	"	176
12.1.7.	Equazioni di equilibrio dei nodi .....	"	177
12.1.8.	Esempio 5.12 .....	"	179
12.2.	Sistemi moltiplicemente connessi .....	"	182
12.2.1.	Calcolo delle condizioni di vincolo.....	"	183
12.2.2.	Trasformazione di un sistema pluriconnesso.....	"	184
<b>13.0.</b>	<b>LE TRAVATURE RETICOLARI .....</b>	"	189
13.1.	Equazioni di equilibrio dei nodi.....	"	190

<b>14.0. LA REAZIONE DIFFUSA DEL VINCOLO DI CONTINUITÀ: LE TENSIONI</b> .....	p.	197
14.1. Relazione tra componenti di tensione e caratteristiche della sollecitazione .....	"	199
<b>15.0. LA GEOMETRIA DELLE MASSE</b> .....	"	203
15.1. Momento statico.....	"	204
15.1.2. Il baricentro di una figura .....	"	207
15.1.3. Il Teorema di Varignon.....	"	207
15.1.4. Coordinate del baricentro .....	"	209
15.1.5. Il Teorema di trasposizione.....	"	212
15.2. Momento d'inerzia assiale .....	"	213
15.2.1. Il Teorema di trasposizione.....	"	217
15.2.2. Gli assi principali d'inerzia ed i momenti d'inerzia principali .....	"	220
15.2.3. Un surrogato del Teorema di Varignon.....	"	220
15.2.4. Il baricentro dei momenti statici.....	"	221
15.3. Polarità tra rette e baricentri dei momenti statici .....	"	223
15.3.1. L'ellisse centrale d'inerzia.....	"	225
15.3.2. Usare l'ellisse centrale d'inerzia .....	"	230
15.3.2.1. Data l'ellisse e la retta trovare il baricentro dei momenti statici .....	"	230
15.3.2.2. Data l'ellisse e il baricentro dei momenti statici trovare la retta corrispondente.....	"	231
15.3.3. Il nocciolo centrale d'inerzia .....	"	232
15.4. Momento d'inerzia polare.....	"	238
15.4.1. Momento d'inerzia polare come somma di due momenti d'inerzia assiali.....	"	240
15.5. Momento d'inerzia centrifugo.....	"	243
15.5.1. Il Teorema di Trasposizione .....	"	247
15.6. Rotazione del sistema di riferimento.....	"	249
15.6.1. Calcolo della retta coniugata di una retta generica assegnata .....	"	254
<b>16.0. LEGGI COSTITUTIVE</b> .....	"	257
16.1. Comportamento elastico.....	"	258
16.1.1. Comportamento elastico lineare .....	"	258
16.1.2. Comportamento elastico non lineare .....	"	259
16.2. Comportamento plastico .....	"	259
16.3. La Legge di Hooke.....	"	260
16.3.1. Prova a trazione e compressione .....	"	260
16.3.1.1. Prova a trazione e compressione nei materiali duttili .....	"	261
16.3.1.2. Prova a trazione e compressione nei materiali fragili .....	"	264
16.3.1.3. Prova a taglio.....	"	265
16.3.1.4. La legge di Hooke generalizzata .....	"	268

<b>17.0. TEORIA DELLA TRAVE</b> .....	p. 273
17.1. Lo Sforzo Normale Semplice.....	" 275
17.1.2. Equazioni di compatibilità, l'ipotesi di Navier.....	" 275
17.1.3. Equazione costitutiva, legge di Hooke.....	" 276
17.1.4. Legge di variazione della reazione distribuita.....	" 277
17.2. La Flessione Semplice.....	" 279
17.2.1. Equazioni di compatibilità, l'ipotesi di Navier.....	" 279
17.2.2. Equazione costitutiva, legge di Hooke.....	" 281
17.2.3. Legge di variazione della reazione distribuita.....	" 281
17.2.4. Equazioni di equilibrio e calcolo delle $\sigma$ .....	" 281
17.2.5. Strutture resistenti per forma.....	" 285
17.2.6. Flessione retta e flessione deviata.....	" 287
17.2.7. Flessione deviata come somma di due flessioni rette.....	" 287
17.3. La Torsione semplice.....	" 289
17.3.1. Equazioni di compatibilità, l'ipotesi di Navier.....	" 289
17.3.2. Equazione costitutiva, legge di Hooke.....	" 291
17.3.3. Legge di variazione della reazione distribuita.....	" 291
17.3.4. Equazioni di equilibrio e calcolo delle $\tau$ .....	" 292
17.3.5. Sezioni di uso frequente:sezione rettangolare.....	" 294
17.3.6. Sezioni di uso frequente:sezione composta da rettangoli....	" 294
17.4.6. Le sezioni cave a parete sottile: la teoria di Bredt.....	" 296
17.4. Il Taglio.....	" 299
17.4.1. Legge di variazione delle tensioni al variare della corda....	" 304
17.4.1.1. Sezione rettangolare.....	" 304
17.4.1.2. Sezioni composte da rettangoli.....	" 305
17.4.1.3. Sezione triangolare.....	" 307
17.5. Sforzo normale e flessione.....	" 309
17.5.1. Sforzo Normale e Flessione come Sforzo Normale Eccentrico.....	" 310
17.5.2. Approccio diretto.....	" 310
17.5.2.1. Equazioni di compatibilità, l'ipotesi di Navier.....	" 310
17.5.2.2. Equazione costitutiva, legge di Hooke.....	" 312
17.5.2.3. Legge di variazione della reazione distribuita....	" 312
17.5.2.4. Equazioni di equilibrio e calcolo delle $\sigma$ .....	" 313
17.5.2.5. Sforzo normale eccentrico (S.N.E.) retto e deviato.....	" 321
17.5.2.5.1. S.N.E. deviato come somma di uno Sforzo Normale semplice e due flessioni rette.....	" 321
<b>18.0. STATO DI TENSIONE NEL PUNTO E VERIFICHE DI RESISTENZA</b> .....	" 325
18.1. Cerchio di Mohr.....	" 331
18.2. Verifiche di resistenza.....	" 335
<b>19.0. VERIFICHE DI RESISTENZA: APPLICAZIONI NUMERICHE</b> .....	" 341
19.1. Esempio 1.19.....	" 341
19.2. Esempio 2.19.....	" 344

19.3.	Esempio 3.19.....	p.	349
19.4.	Esempio 4.19.....	"	352
19.5.	Esempio 5.19.....	"	353
<b>A.0.</b>	<b>APPENDICE A: PROGRAMMA TELAI PIANI.....</b>	"	371
A.1.	L'ambiente grafico di lavoro .....	"	371
A.2.	Impostazione delle fasi di lavoro .....	"	373
A.2.1.	Generazione dello schema strutturale.....	"	374
A.3.	Inserimento o modifica per elemento singolo .....	"	376
A.3.1.	Inserimento/modifica dati dei nodi.....	"	377
A.3.2.	Inserimento/modifica dati delle travi.....	"	377
A.3.2.1.	Prima pagina tabella dati .....	"	377
A.3.2.2.	Seconda pagina tabella dati .....	"	378
A.4.	Inserimento/modifica dati tramite menù contestuale o copia e incolla... ..	"	379
A.5.	Inserimento o modifica veloce .....	"	380
A.6.	Bottoni di generazione grafica.....	"	381
A.7.	Bottoni di visualizzazione .....	"	385
A.8.	Bottoni di verifica.....	"	388
A.9.	I menù a discesa .....	"	390
A.10.	Esempio numerico.....	"	392
<b>B.0.</b>	<b>APPENDICE B: PROGRAMMA GEOMETRIA DELLE MASSE.....</b>	"	399
B.1.	Generazione del contorno della sezione.....	"	399
B.2.	Inserimento dei vertici di uno o più poligoni .....	"	400
B.3.	Inserimento rettangoli a lati paralleli alla griglia .....	"	401
B.4.	Inserimento rettangoli inclinati .....	"	401
B.5.	Creazione di poligoni regolari ed archi pieni.....	"	401
B.6.	Modifica del contorno della figura composta da uno o più poligoni. ....	"	403
B.6.1.	Traslazione.....	"	403
B.6.2.	Rotazione della sezione .....	"	404
B.6.3.	Spostamento dei vertici della sezione.....	"	404
B.6.4.	Assegnazione diretta dell'inclinazione relativa tra due dei lati di un poligono.....	"	405
B.7.	Allineamento dei vari poligoni.....	"	406
B.7.1.	Allineamento in orizzontale e verticale.....	"	406
B.7.1.1.	Allineamento in verticale ed orizzontale secondo la direzione fissata del lato contiguo .....	"	406
B.7.1.2.	Allineamento in verticale ed orizzontale di un poligono rispetto ad un vertice .....	"	407
B.8.	Eliminazione dei vertici .....	"	407
B.9.	Aggiunta di nuovi vertici.....	"	407
B.10.	Distanza tra due punti.....	"	408
B.11.	Inserimento di vertici ausiliari.....	"	408
B.12.	Fusione di 2 poligoni.....	"	409
B.13.	Punti di intersezione di 2 poligoni.....	"	409
B.14.	Nodi all'intersezione di due lati .....	"	409
B.15.	Separazione di un poligono in 2 poligoni.....	"	410



B.16. Taglio di un poligono .....	p.	410
B.17. Creazione di poligoni cavi a spessore costante .....	"	410
B.18. Creazione di fori .....	"	410
B.19. Creazione e gestione di un archivio di sezioni .....	"	411
B.20. Calcolo delle caratteristiche geometriche .....	"	411
B.21. Calcolo del momento d'inerzia rispetto ad una retta qualunque .....	"	412
B.22. Menù a discesa .....	"	412
<b>INSTALLAZIONE DEL SOFTWARE ALLEGATO .....</b>	"	415
Introduzione .....	"	415
Requisiti minimi hardware e software .....	"	415
Download del software e richiesta della password di attivazione .....	"	415
Installazione e attivazione del software .....	"	416
<b>LICENZA D'USO .....</b>	"	421
<b>DOWNLOAD DEL SOFTWARE E RICHIESTA DELLA PASSWORD DI ATTIVAZIONE .....</b>	"	422



## 1.0 RICHIAMI DI ALGEBRA DELLE MATRICI

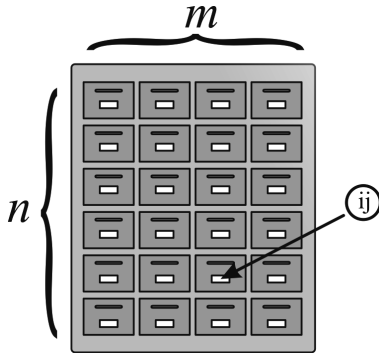


Fig. 1.1

Una *matrice* è una specie di cassetiera formata di  $n$  file orizzontali di cassetti (*righe*) e di  $m$  file verticali (*colonne*); all'interno di ciascun cassetto si può introdurre tutto quello che si vuole: ad es. dei numeri (Fig. 1.1). Ciascun contenitore ha un'etichetta di riconoscimento che può racchiudere un nome (Ciccio, Mario, Filippo.....) oppure un numero di identificazione formato di due cifre (*indici*)<sup>1</sup>: di cui la prima,  $i$ , indica sempre la riga di appartenenza, mentre la seconda,  $j$ , la colonna.

Ciò che sta all'interno del cassetto generico prende il nome di *elemento* e si indica usualmente con una lettera minuscola seguita dai due indici  $i$  e  $j$

( $a_{ij}$ ). Il contenuto del cassetto indicato in Fig.1.1 sarebbe  $a_{53}$ : cioè ciò che sta dentro il contenitore che si trova all'incrocio della 5<sup>a</sup> riga e della 3<sup>a</sup> colonna.

Si chiama *ordine* di una matrice, e si indica con  $n \times m$ , il numero di righe e di colonne di cui essa è formata: così, ad es., una matrice di ordine  $5 \times 4$  (cinque per quattro) sarà una tabella formata da 5 righe e 4 colonne.

Le matrici, che per noi, da questo momento in poi, saranno delle tabelle di numeri, possono classificarsi, in base alla loro forma, in

- *Matrici rettangolari*
- *Matrici quadrate*

### 1.1 Matrici rettangolari

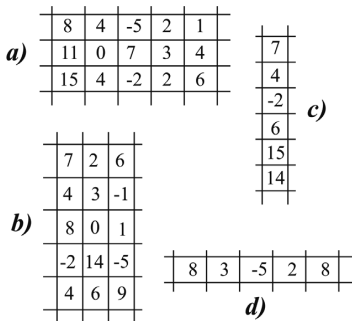


Fig. 2.1

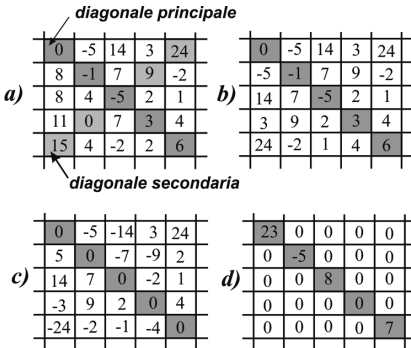
Una matrice si dice rettangolare quando il numero di righe è diverso dal numero delle colonne  $n \neq m$ ; essa è *rettangolare bassa* (Fig. 2.1a) se le colonne sono maggiori delle righe ( $m > n$ ); *rettangolare alta* (Fig. 2.1b) se le righe sono maggiori delle colonne ( $n > m$ ). Una matrice rettangolare alta con una sola colonna (Fig. 2.1c) si chiama *matrice colonna*, mentre, una matrice rettangolare bassa con un sola riga (Fig. 2.1d) si chiama *matrice riga*.

Le matrici riga e colonna prendono anche il nome di *vettori*, in quanto, come vedremo nel seguito, verranno usate proprio per rappresentare analiticamente delle entità fisiche che prendono il nome di vettori.

<sup>1</sup> Nel noto gioco della *Battaglia Navale* ogni casella resta proprio identificata dal nome della riga e della colonna di appartenenza.

### 1.2 Matrici quadrate

Una matrice si dice *quadrata* quando il numero delle righe è uguale al numero delle colonne ( $n=m$ ); ovviamente tali matrici non si differenziano più in base alla forma ma in



**Fig. 3.1**

base al contenuto. Le due diagonali di una matrice quadrata prendono rispettivamente il nome di *diagonale principale* e *diagonale secondaria* (Fig. 3.1a).

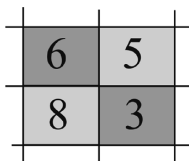
Una matrice si dice *generica* quando i suoi elementi sono collocati all'interno di essa senza alcuna regola (Fig.3.1a); si dice *simmetrica* quando gli elementi disposti simmetricamente rispetto alla diagonale principale sono uguali ( $a_{ij}=a_{ji}$ , Fig.3.1b); si dice *antisimmetrica* (o *emisimmetrica*) se gli elementi disposti simmetricamente rispetto alla diagonale principale sono tali che sommati danno zero ( $a_{ij} + a_{ji} = 0$ ). Ciò comporta che gli elementi simmetrici sono l'uno l'opposto dell'altro e gli elementi sulla diagonale principale sono tutti nulli ( $a_{ij}=-a_{ji}$  per  $i \neq j$  e  $a_{ij}=0$  per  $i=j$ , Fig.3.1c).

Una matrice si dice *diagonale* se gli unici elementi diversi da zero giacciono sulla diagonale principale ( $a_{ij}=0$  per  $i \neq j$ , Fig.3.1d).

Ovviamente esistono anche altri tipi di matrici quadrate ma, per i nostri scopi, è sufficiente soltanto la conoscenza di quelli sopra elencati.

#### 1.2.1 Il determinante

Le matrici quadrate hanno anche una particolarità che non è posseduta da quelle rettangolari: da esse è possibile estrarre un numero (ottenuto eseguendo una particolare serie di operazioni sugli elementi della matrice stessa<sup>2</sup>) che prende il nome di *determinante*. L'estrazione del determinante è un lavoro abbastanza complesso e richiede lo sviluppo di un gran numero di operazioni elementari di somma e prodotto. C'è da sottolineare che l'impiego delle matrici non è affatto orientato al calcolo manuale ma a quello automatico: i microprocessori dei moderni personal computer sono in grado di eseguire miliardi di operazioni elementari al secondo. Tuttavia è utile, per poter svolgere delle semplici applicazioni numeriche, imparare, quantomeno, ad estrarre il determinante di una matrice 2x2 e di una matrice 3x3.



$$D = (6 \times 3) - (8 \times 5) = -22$$

**Fig. 4.1**

In una matrice 2x2 il determinante **D** si ottiene semplicemente effettuando il prodotto degli elementi della diagonale principale e sottraendo ad esso il prodotto degli elementi della diagonale secondaria (Fig. 4.1).

Per il calcolo del determinante di una matrice 3x3 si può applicare la cosiddetta *regola di Sarrus*. Si comincia con l'ampliare la matrice aggiungendo due nuove colonne, che altro non sono che la ripetizione delle prime due (Fig.5.1). Nella matrice allargata si in-

<sup>2</sup> Si vuole volutamente evitare l'uso di un linguaggio rigoroso per facilitare l'acquisizione di alcuni concetti.

dividuoano 3 diagonali principali e 3 diagonali secondarie: si esegue la somma dei prodotti degli elementi delle 3 diagonali principali e, a questo valore, si sottrae il numero che si ottiene effettuando la somma dei prodotti delle 3 diagonali secondarie.

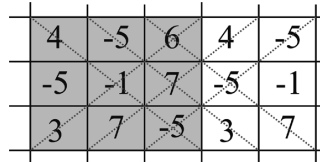


Fig. 5.1

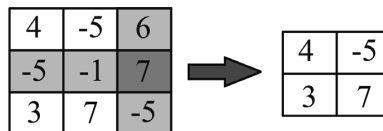
$$D = \{[(4) \times (-1) \times (-5)] + [(-5) \times (7) \times (3)] + [(6) \times (-5) \times (7)]\} - \{[(3) \times (-1) \times (6)] + [(7) \times (7) \times (4)] + [(-5) \times (-5) \times (-5)]\} = -348$$

Il determinante è un numero che può risultare positivo, negativo o nullo. Se il determinante è diverso da zero la matrice si dice *non singolare*, mentre, se il determinante è nullo la matrice si dice *singolare*.

### 1.2.2 Complemento algebrico

In una matrice quadrata si definisce *complemento algebrico* dell'elemento  $a_{ij}$ , il determinante della matrice che si ottiene eliminando la  $i$ -ma riga e la  $j$ -ma colonna, avendo cura di cambiarne il segno se la somma degli indici  $i+j$  risulta dispari.

Data la matrice quadrata di Fig.6.1, calcolare il complemento algebrico  $C_{23}$  dell'elemento  $a_{23}$ . Si elimina la 2ª riga e la 3ª colonna della matrice e si calcola il determinante della matrice 2x2 rimanente. Siccome,  $2+3=5$ , è un numero dispari, il determinante ottenuto (43) si cambia di segno.



$$C_{23} = -\{[(4) \times (7)] - [(3) \times (-5)]\} = -43$$

Fig. 6.1

### 1.3 Algebra delle matrici

Le matrici possono essere trattate come se fossero dei numeri *sui generis*, cioè per esse è possibile definire le quattro operazioni algebriche fondamentali: *somma*, *differenza*, *prodotto* e *divisione*. Così come nell'*Algebra ordinaria* i numeri vengono rappresentati con dei simboli (lettere minuscole dell'alfabeto latino), altrettanto occorre fare nell'*Algebra matriciale*. Per evitare di far confusione tra numeri e matrici, queste ultime vengono rappresentate simbolicamente con delle lettere

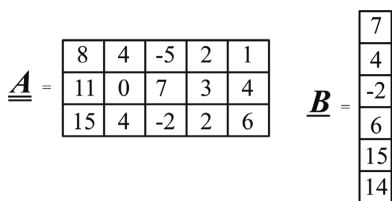


Fig. 7.1

maiuscole sottolineate. Una matrice qualunque (rettangolare o quadrata che sia) di ordi-

ne  $n \times m$  viene indicata con una doppia sottolineatura  $\underline{\underline{A}}$  (Fig.7.1), mentre, una matrice colonna di ordine  $n \times 1$  viene indicata con una semplice sottolineatura  $\underline{B}$ .

Ovviamente le 4 operazioni dell'algebra matriciale hanno ben poco a che vedere con le usuali operazioni algebriche cui siamo abituati. Una prima particolarità è quella che non sempre è possibile eseguire una data operazione tra due matrici, esistono delle regole, dette *regole di conformità*, che stabiliscono le caratteristiche che devono avere le due matrici affinché si possa operare su di esse.

1.3.1 Trasposta di una matrice

$$\underline{\underline{A}}^T = \tilde{\underline{\underline{A}}} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 8 & 11 & 15 \\ \hline 4 & 0 & 4 \\ \hline -5 & 7 & -2 \\ \hline 2 & 3 & 2 \\ \hline 1 & 4 & 6 \\ \hline \end{array}$$

$$\underline{\underline{B}}^T = \tilde{\underline{\underline{B}}} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 7 & 4 & -2 & 6 & 15 & 14 \\ \hline \end{array}$$

Si definisce *trasposta* di una matrice  $\underline{\underline{A}}$ , di ordine  $n \times m$ , un'altra matrice, di ordine  $m \times n$ , che si ottiene da quella data scambiando le righe con le colonne. La matrice trasposta si indica o con una  $T$  ad esponente, oppure tramite una tilde posta sul nome. Di solito le *matrici riga* non vengono rappresentate con un simbolo *ad hoc* ma proprio come trasposte delle corrispondenti matrici colonna. In Fig.8.1 sono riportate le trasposte delle matrici di Fig.7.1.

Fig. 8.1

1.3.2 Matrice unità e matrice nulla

Nell'ambito dell'algebra ordinaria esistono due numeri particolari che sono  $\underline{\underline{1}}$  e  $\underline{\underline{0}}$ .

La particolarità dell'uno è che esso è il solo numero ad essere *indifferente* alle operazioni di prodotto e quoziente. Un qualunque numero moltiplicato o diviso per  $\underline{\underline{1}}$  rimane sempre inalterato.

La particolarità dello zero è che esso è il solo numero *indifferente* alle altre due operazioni di somma e differenza. Un qualunque numero a cui si somma o si sottrae lo zero rimane invariato.

$$\underline{\underline{I}} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\underline{\underline{O}}^T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\underline{\underline{O}} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\underline{\underline{O}} = \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}$$

Esistono due matrici che si comportano in ugual maniera? Esistono, cioè, due matrici che risultano indifferenti alle operazioni di prodotto e quoziente e di somma e differenza? Sì, queste matrici esistono e prendono rispettivamente il nome di *matrice unità* (o *identità*) e di *matrice nulla*.

La matrice unità, che si indica sempre con  $\underline{\underline{I}}$ , è una particolare matrice diagonale, di dimensioni  $n$  qualsivoglia, in cui tutti gli elementi della diagonale principale sono uguali ad  $\underline{\underline{1}}$  (Fig. 9.1). La matrice nulla è, invece, una qualunque matrice di ordine  $n \times m$  piena di zeri e che si rappresenta sempre con la lettera  $\underline{\underline{O}}$

Fig. 9.1

La matrice unità, che si indica sempre con  $\underline{\underline{I}}$ , è una particolare matrice diagonale, di dimensioni  $n$  qualsivoglia, in cui tutti gli elementi della diagonale principale sono uguali ad  $\underline{\underline{1}}$  (Fig. 9.1). La matrice nulla è, invece, una qualunque matrice di ordine  $n \times m$  piena di zeri e che si rappresenta sempre con la lettera  $\underline{\underline{O}}$

### 1.3.3 Somma di matrici

Date due matrici  $\underline{\underline{A}}$  e  $\underline{\underline{B}}$ , la loro somma si indica con

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 12 & 13 & 12 \\ \hline 10 & 5 & 11 \\ \hline -7 & 12 & -1 \\ \hline 11 & 11 & 2 \\ \hline 13 & 7 & 11 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 8 & 11 & 15 \\ \hline 4 & 0 & 4 \\ \hline -5 & 7 & -2 \\ \hline 2 & 3 & 2 \\ \hline 1 & 4 & 6 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 2 & -3 \\ \hline 6 & 5 & 7 \\ \hline -2 & 5 & 1 \\ \hline 9 & 8 & 0 \\ \hline 12 & 3 & 5 \\ \hline \end{array}$$

dove  $\underline{\underline{A}}$  e  $\underline{\underline{B}}$  sono le *matrici addende* e  $\underline{\underline{C}}$  è la *matrice somma*. Le matrici addende sono *conformi* alla somma solo se sono dello stesso ordine, cioè se hanno lo stesso numero di righe e di colonne. La matrice somma è una matrice, pure dello stesso ordine, i cui elementi  $c_{ij}$  sono dati dalla somma degli elementi omologhi delle due matrici:  $a_{ij} + b_{ij}$ .

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}$$

**Fig. 10.1**

Per sommare due matrici basta sovrapporle e sommare gli elementi corrispondenti (Fig. 10.1).

La somma tra matrici gode delle stesse proprietà della somma nell'algebra ordinaria, cioè *proprietà associativa*

$$\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} + \underline{\underline{C}} + \underline{\underline{D}} = (\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}) + (\underline{\underline{C}} + \underline{\underline{D}})$$

e *proprietà commutativa*

$$\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} + \underline{\underline{C}} + \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{C}} + \underline{\underline{B}} + \underline{\underline{A}}$$

inoltre, la *trasposta di una somma* di matrici è uguale alla *somma delle trasposte* delle singole matrici

$$(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} + \underline{\underline{C}} + \underline{\underline{D}})^T = \underline{\underline{A}}^T + \underline{\underline{B}}^T + \underline{\underline{C}}^T + \underline{\underline{D}}^T$$

### 1.3.4 Differenza di matrici

Date due matrici  $\underline{\underline{A}}$  e  $\underline{\underline{B}}$ , la loro differenza si indica

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} - \underline{\underline{B}}$$

Tutto ciò che è stato detto per la somma vale anche per la differenza. L'unica diversità è che l'elemento generico  $c_{ij}$  della *matrice differenza* è dato dalla differenza -e non più dalla somma- degli elementi omologhi delle due matrici:  $a_{ij} - b_{ij}$ .

### 1.3.5 prodotto di matrici

Date due matrici  $\underline{\underline{A}}$  e  $\underline{\underline{B}}$ , il loro prodotto si indica

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}$$

Dove  $\underline{\underline{C}}$  è la *matrice prodotto*,  $\underline{\underline{A}}$  è la *matrice moltiplicanda* e  $\underline{\underline{B}}$  è la *matrice moltiplicatore*. Le due matrici sono *conformi* al prodotto se le colonne della prima matrice (*moltiplicanda*) sono uguali alle righe della seconda matrice (*moltiplicatore*). La matrice prodotto è una matrice che ha tante righe quante sono quelle della prima matrice e tante colonne quante sono quelle della seconda.

L'elemento generico  $c_{ij}$  si ottiene dalla somma dei prodotti degli elementi della riga  $i$ -esima della prima matrice per la colonna  $j$ -esima della seconda (Fig. 11.1)

Il prodotto tra matrici gode della *proprietà associativa*

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} \times \underline{\underline{B}}$$

28	46
8	28
26	15
22	29
16	52

$$=$$

8	1	5
4	0	4
-5	7	-2
2	3	2
1	4	6

$$\times$$

4	2
6	5
-2	5

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{D}} = (\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}) \cdot (\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{D}})$$

gode della *proprietà distributiva*

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} + \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{C}} + \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{C}} + \underline{\underline{D}})$$

ma non gode della *proprietà commutativa*, cioè

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \neq \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}$$

pertanto, quando si eseguono dei prodotti, occorre sempre prestare attenzione a non scambiare mai l'ordine delle varie matrici.

Inoltre, la *trasposta di un prodotto* di matrici è uguale al prodotto *delle trasposte* delle singole matrici con ordine scambiato

$$(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{D}})^T = \underline{\underline{D}}^T \cdot \underline{\underline{C}}^T \cdot \underline{\underline{B}}^T \cdot \underline{\underline{A}}^T$$

$$c_{31} = \begin{array}{|c|c|} \hline -5 & 4 \\ \hline 7 & 6 \\ \hline -2 & -2 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|} \hline -20+ & 42+ \\ \hline 4 & 26 \\ \hline \end{array}$$

Fig. 11.1

### 1.3.6 Divisione di matrici

Date due matrici  $\underline{\underline{A}}$  e  $\underline{\underline{B}}$ , il loro quoziente potrebbe indicarsi con

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} / \underline{\underline{B}}$$

Dove  $\underline{\underline{C}}$  è la *matrice quoziente*,  $\underline{\underline{A}}$  è la *matrice dividenda* e  $\underline{\underline{B}}$  è la *matrice divisore*. Ricordando la divisione tra numeri, si può scrivere

$$c = a / b = \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} = a \cdot b^{-1}$$

cioè il quoziente di due numeri si può indicare come prodotto del dividendo per l'inverso del divisore. Orbene, nell'ambito dell'algebra delle matrici, viene sempre adoperato questo formalismo, per cui il quoziente di due matrici si esprime sempre come prodotto della matrice dividenda per l'inversa della matrice divisore

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}^{-1}$$

La prima conformità che deve essere rispettata è quella che riguarda il prodotto  $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}^{-1}$ : le colonne della prima matrice devono essere uguali alle righe della seconda.