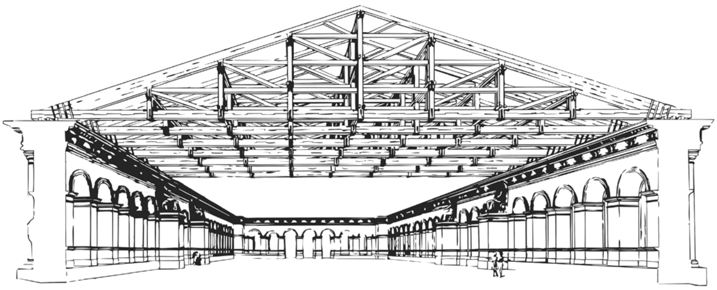
Filippo Cucco

# LEZIONI DI STATICA

## CONCETTI DI BASE ALLA MECCANICA DELLE STRUTTURE

**SECONDA EDIZIONE**



**SOFTWARE INCLUSO**

STRUTTURE INTELAIATE PIANE E GEOMETRIA DELLE MASSE

**F.A.Q.** (domande e risposte sui principali argomenti)

G-cloud

GRAFILL

Filippo Cucco
LEZIONI DI STATICA

ISBN 13 978-88-8207-548-4
EAN 9 788882 075484

Quaderni, 18
Seconda edizione, febbraio 2014

Cucco, Filippo <1951->
Lezioni di statica / Filippo Cucco. – 2. ed. – Palermo : Grafill, 2014.
(Quaderni ; 18)
ISBN 978-88-8207-548-4
1. Statica.
531.12 CDD-22 SBN Pal0265843
*CIP – Biblioteca centrale della Regione siciliana "Alberto Bombace"*

Il presente volume è **disponibile anche in versione eBook** (formato *.pdf) compatibile con PC, Macintosh, Smartphone, Tablet, eReader.
Per l'acquisto di eBook e software sono previsti pagamenti con conto corrente postale, bonifico bancario, carta di credito e paypal. Per i pagamenti con carta di credito e paypal è consentito il download immediato del prodotto acquistato.

Per maggiori informazioni inquadra con uno smartphone o un tablet il codice QR sottostante.

I lettori di codice QR sono disponibili gratuitamente su Play Store, App Store e Market Place.


Via Principe di Palagonia, 87/91 – 90145 Palermo
Telefono 091/6823069 – Fax 091/6823313
Internet http://www.grafill.it – E-Mail grafill@grafill.it

Finito di stampare nel mese di febbraio 2014
presso Tipolitografia Luxograph S.r.l. Piazza Bartolomeo Da Messina, 2/e – 90142 Palermo

# *INDICE*

# *1.0 RICHIAMI DI ALGEBRA DELLE MATRICI*

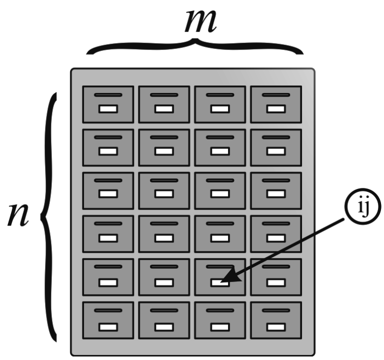



**Fig. 1.1**

Una *matrice* è una specie di cassettiera formata di ***n*** file orizzontali di cassetti (*righe*) e di ***m*** file verticali (*colonne*); all'interno di ciascun cassetto si può introdurre tutto quello che si vuole: ad es. dei numeri (Fig. 1.1). Ciascun contenitore ha un'etichetta di riconoscimento che può racchiudere un nome (Ciccio, Mario, Filippo.....) oppure un numero di identificazione formato di due cifre (*indici*)[1]: di cui la prima, ***i***, indica sempre la riga di appartenenza, mentre la seconda, ***j***, la colonna.

Ciò che sta all'interno del cassetto generico prende il nome di *elemento* e si indica usualmente con una lettera minuscola seguita dai due indici ***i*** e ***j*** ($a_{ij}$). Il contenuto del cassetto indicato in Fig.1.1 sarebbe $a_{53}$: cioè ciò che sta dentro il contenitore che si trova all'incrocio della 5^ riga e della 3^ colonna.

Si chiama *ordine* di una matrice, e si indica con ***nxm***, il numero di righe e di colonne di cui essa è formata: così, ad es., una matrice di ordine 5x4 (cinque per quattro) sarà una tabella formata da 5 righe e 4 colonne.

Le matrici, che per noi, da questo momento in poi, saranno delle tabelle di numeri, possono classificarsi, in base alla loro forma, in

- ***Matrici rettangolari***
- ***Matrici quadrate***

### *1.1 Matrici rettangolari*

***a)***

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 8 | 4 | -5 | 2 | 1 |
| 11 | 0 | 7 | 3 | 4 |
| 15 | 4 | -2 | 2 | 6 |

***b)***

| | | |
|---|---|---|
| 7 | 2 | 6 |
| 4 | 3 | -1 |
| 8 | 0 | 1 |
| -2 | 14 | -5 |
| 4 | 6 | 9 |

***c)***

| |
|---|
| 7 |
| 4 |
| -2 |
| 6 |
| 15 |
| 14 |

***d)***

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 8 | 3 | -5 | 2 | 8 |

**Fig. 2.1**

Una matrice si dice rettangolare quando il numero di righe è diverso dal numero delle colonne $n \neq m$; essa è *rettangolare bassa* (Fig. 2.1a) se le colonne sono maggiori delle righe ($m > n$); *rettangolare alta* (Fig. 2.1b) se le righe sono maggiori delle colonne ($n > m$). Una matrice rettangolare alta con una sola colonna (Fig. 2.1c) si chiama *matrice colonna*, mentre, una matrice rettangolare bassa con un sola riga (Fig. 2.1d) si chiama *matrice riga*.

Le matrici riga e colonna prendono anche il nome di *vettori*, in quanto, come vedremo nel seguito, verranno usate proprio per rappresentare analiticamente delle entità fisiche che prendono il nome di vettori.

[1] Nel noto gioco della *Battaglia Navale* ogni casella resta proprio identificata dal nome della riga e della colonna di appartenenza.

### *1.2 Matrici quadrate*

Una matrice si dice *quadrata* quando il numero delle righe è uguale al numero delle colonne (***n=m***); ovviamente tali matrici non si differenziano più in base alla forma ma in base al contenuto. Le due diagonali di una matrice quadrata prendono rispettivamente il nome di *diagonale principale* e *diagonale secondaria* (Fig. 3.1a).

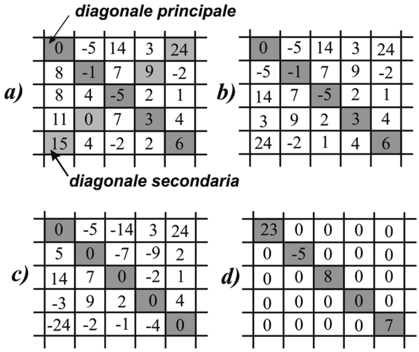



**Fig. 3.1**

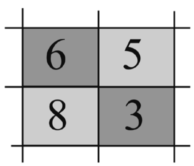
Una matrice si dice *generica* quando i suoi elementi sono collocati all'interno di essa senza alcuna regola (Fig.3.1a); si dice *simmetrica* quando gli elementi disposti simmetricamente rispetto alla diagonale principale sono uguali ($a_{ij}$=$a_{ji}$, Fig.3.1b); si dice *antisimmetrica* (o *emisimmetrica*) se gli elementi disposti simmetricamente rispetto alla diagonale principale sono tali che sommati danno zero ($a_{ij} + a_{ji} = 0$). Ciò comporta che gli elementi simmetrici sono l'uno l'opposto dell'altro e gli elementi sulla diagonale principale sono tutti nulli ($a_{ij}=-a_{ji}$ per $i \neq j$ e $a_{ij}=0$ per $i=j$, Fig.3.1c).

Una matrice si dice *diagonale* se gli unici elementi diversi da zero giacciono sulla diagonale principale ($a_{ij}=0$ per $i \neq j$, Fig.3.1d).

Ovviamente esistono anche altri tipi di matrici quadrate ma, per i nostri scopi, è sufficiente soltanto la conoscenza di quelli sopra elencati.

#### *1.2.1 Il determinante*

Le matrici quadrate hanno anche una particolarità che non è posseduta da quelle rettangolari: da esse è possibile estrarre un numero (ottenuto eseguendo una particolare serie di operazioni sugli elementi della matrice stessa[2]) che prende il nome di *determinante*. L'estrazione del determinante è un lavoro abbastanza complesso e richiede lo sviluppo di un gran numero di operazioni elementari di somma e prodotto. C'è da sottolineare che l'impiego delle matrici non è affatto orientato al calcolo manuale ma a quello automatico: i microprocessori dei moderni personal computer sono in grado di eseguire miliardi di operazioni elementari al secondo. Tuttavia è utile, per poter svolgere delle semplici applicazioni numeriche, imparare, quantomeno, ad estrarre il determinante di una matrice 2x2 e di una matrice 3x3.




D = (6x3)-(8x5) = -22

**Fig. 4.1**

In una matrice 2x2 il determinante ***D*** si ottiene semplicemente effettuando il prodotto degli elementi della diagonale principale e sottraendo ad esso il prodotto degli elementi della diagonale secondaria (Fig. 4.1).

Per il calcolo del determinante di una matrice 3x3 si può applicare la cosiddetta *regola di Sarrus*. Si comincia con l'ampliare la matrice aggiungendo due nuove colonne, che altro non sono che la ripetizione delle prime due (Fig.5.1). Nella matrice allargata si in-

[2] Si vuole volutamente evitare l'uso di un linguaggio rigoroso per facilitare l'acquisizione di alcuni concetti.

dividuano 3 diagonali principali e 3 diagonali secondarie: si esegue la somma dei prodotti degli elementi delle 3 diagonali principali e, a questo valore, si sottrae il numero che si ottiene effettuando la somma dei prodotti delle 3 diagonali secondarie.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4 | -5 | 6 | 4 | -5 |
| -5 | -1 | 7 | -5 | -1 |
| 3 | 7 | -5 | 3 | 7 |

**Fig. 5.1**

D = {[(4)x(-1)x(-5)] + [(-5)x(7)x(3)] + [(6)x(-5)x(7)]}-{[(3)x(-1)x(6)] + + [(7)x(7)x(4)] + [(-5)x(-5)x(-5)]} = -348

Il determinante è un numero che può risultare positivo, negativo o nullo. Se il determinante è diverso da zero la matrice si dice *non singolare*, mentre, se il determinante è nullo la matrice si dice *singolare*.

### *1.2.2 Complemento algebrico*

In una matrice quadrata si definisce *complemento algebrico* dell'elemento $\boldsymbol{a_{ij}}$, il determinante della matrice che si ottiene eliminando la *i-ma* riga e la *j-ma* colonna, avendo cura di cambiarne il segno se la somma degli indici ***i+j*** risulta dispari.

Data la matrice quadrata di Fig.6.1, calcolare il complemento algebrico $\boldsymbol{C_{23}}$ dell'elemento $\boldsymbol{a_{23}}$. Si elimina la 2^ riga e la 3^ colonna della matrice e si calcola il determinante della matrice 2x2 rimanente. Siccome, 2+3=5, è un numero dispari, il determinante ottenuto (43) si cambia di segno.

$$\begin{bmatrix} 4 & -5 & 6 \\ -5 & -1 & 7 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$C_{23} = -\{[(4)\times(7)]-[(3)\times(-5)]\} = -43$$

**Fig. 6.1**

## *1.3 Algebra delle matrici*

Le matrici possono essere trattate come se fossero dei numeri *sui generis*, cioè per esse è possibile definire le quattro operazioni algebriche fondamentali: *somma*, *differenza*, *prodotto* e *divisione*. Così come nell'*Algebra ordinaria* i numeri vengono rappresentati con dei simboli (lettere minuscole dell'alfabeto latino), altrettanto occorre fare nell'*Algebra matriciale*. Per evitare di far confusione tra numeri e matrici, queste ultime vengono rappresentate simbolicamente con delle lettere

$$\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} = \begin{bmatrix} 8 & 4 & -5 & 2 & 1 \\ 11 & 0 & 7 & 3 & 4 \\ 15 & 4 & -2 & 2 & 6 \end{bmatrix} \qquad \underline{\boldsymbol{B}} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -2 \\ 6 \\ 15 \\ 14 \end{bmatrix}$$

**Fig. 7.1**

maiuscole sottolineate. Una matrice qualunque (rettangolare o quadrata che sia) di ordine ***nxm*** viene indicata con una doppia sottolineatura $\underline{\underline{A}}$ (Fig.7.1), mentre, una matrice colonna di ordine ***nx1*** viene indicata con una semplice sottolinea $\underline{B}$.

Ovviamente le 4 operazioni dell'algebra matriciale hanno ben poco a che vedere con le usuali operazioni algebriche cui siamo abituati. Una prima particolarità è quella che non sempre è possibile eseguire una data operazione tra due matrici, esistono delle regole, dette *regole di conformità*, che stabiliscono le caratteristiche che devono avere le due matrici affinché si possa operare su di esse.

### *1.3.1 Trasposta di una matrice*

$$\underline{\underline{A}}^T = \tilde{\underline{\underline{A}}} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 8 & 11 & 15 \\ \hline 4 & 0 & 4 \\ \hline -5 & 7 & -2 \\ \hline 2 & 3 & 2 \\ \hline 1 & 4 & 6 \\ \hline \end{array}$$

$$\underline{B}^T = \tilde{\underline{B}} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 7 & 4 & -2 & 6 & 15 & 14 \\ \hline \end{array}$$

**Fig. 8.1**

Si definisce *trasposta* di una matrice $\underline{\underline{A}}$, di ordine ***nxm***, un'altra matrice, di ordine ***mxn***, che si ottiene da quella data scambiando le righe con le colonne. La matrice trasposta si indica o con una ***T*** ad esponente, oppure tramite una tilde posta sul nome. Di solito le *matrici riga* non vengono rappresentate con un simbolo *ad hoc* ma proprio come trasposte delle corrispondenti matrici colonna. In Fig.8.1 sono riportate le trasposte delle matrici di Fig.7.1.

### *1.3.2 Matrice unità e matrice nulla*

Nell'ambito dell'*algebra ordinaria* esistono due numeri particolari che sono ***1*** e ***0***.

La particolarità dell'uno è che esso è il solo numero ad essere *indifferente* alle operazioni di prodotto e quoziente. Un qualunque numero moltiplicato o diviso per ***1*** rimane sempre inalterato.

La particolarità dello zero è che esso è il solo numero *indifferente* alle altre due operazioni di somma e differenza. Un qualunque numero a cui si somma o si sottrae lo zero rimane invariato.

$$\underline{\underline{I}} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \underline{O}^T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\underline{\underline{O}} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \qquad \underline{O} = \begin{array}{|c|}\hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}$$

**Fig. 9.1**

Esistono due matrici che si comportano in ugual maniera? Esistono, cioè, due matrici che risultano indifferenti alle operazioni di prodotto e quoziente e di somma e differenza? Sì, queste matrici esistono e prendono rispettivamente il nome di *matrice unità* (o *identità*) e di *matrice nulla*.

La matrice unità, che si indica sempre con $\underline{\underline{I}}$, è una particolare matrice diagonale, di dimensioni ***n*** qualsivoglia, in cui tutti gli elementi della diagonale principale sono uguali ad ***1*** (Fig. 9.1). La matrice nulla è, invece, una qualunque matrice di ordine ***nxm*** piena di zeri e che si rappresenta sempre con la lettera $\underline{\underline{O}}$

### *1.3.3 Somma di matrici*

Date due matrici $\underline{\underline{A}}$ e $\underline{\underline{B}}$, la loro somma si indica con

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}$$

$$\begin{bmatrix} 12 & 13 & 12 \\ 10 & 5 & 11 \\ -7 & 12 & -1 \\ 11 & 11 & 2 \\ 13 & 7 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 11 & 15 \\ 4 & 0 & 4 \\ -5 & 7 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 6 & 5 & 7 \\ -2 & 5 & 1 \\ 9 & 8 & 0 \\ 12 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{C}} \quad = \quad \underline{\underline{A}} \quad + \quad \underline{\underline{B}}$$

**Fig. 10.1**

dove $\underline{\underline{A}}$ e $\underline{\underline{B}}$ sono le *matrici addende* e $\underline{\underline{C}}$ è la *matrice somma***.** Le matrici addende sono *conformi* alla somma solo se sono dello stesso ordine, cioè se hanno lo stesso numero di righe e di colonne. La matrice somma è una matrice, pure dello stesso ordine, i cui elementi $c_{ij}$ sono dati dalla somma degli elementi omologhi delle due matrici: $a_{ij}+b_{ij}$.

Per sommare due matrici basta sovrapporle e sommare gli elementi corrispondenti (Fig. 10.1).

La somma tra matrici gode delle stesse proprietà della somma nell'algebra ordinaria, cioè *proprietà associativa*

$$\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} + \underline{\underline{C}} + \underline{\underline{D}} = (\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}) + (\underline{\underline{C}} + \underline{\underline{D}})$$

e *proprietà commutativa*

$$\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} + \underline{\underline{C}} + \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{C}} + \underline{\underline{B}} + \underline{\underline{A}}$$

inoltre, la *trasposta di una somma* di matrici è uguale alla *somma delle trasposte* delle singole matrici

$$(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} + \underline{\underline{C}} + \underline{\underline{D}})^T = \underline{\underline{A}}^T + \underline{\underline{B}}^T + \underline{\underline{C}}^T + \underline{\underline{D}}^T$$

### *1.3.4 Differenza di matrici*

Date due matrici $\underline{\underline{A}}$ e $\underline{\underline{B}}$, la loro differenza si indica

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} - \underline{\underline{B}}$$

Tutto ciò che è stato detto per la somma vale anche per la differenza. L'unica diversità è che l'elemento generico $c_{ij}$ della *matrice differenza* è dato dalla differenza -e non più dalla somma- degli elementi omologhi delle due matrici: $a_{ij} - b_{ij}$.

### *1.3.5 prodotto di matrici*

Date due matrici $\underline{\underline{A}}$ e $\underline{\underline{B}}$, il loro prodotto si indica

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}$$

Dove $\underline{\underline{C}}$ è la *matrice prodotto*, $\underline{\underline{A}}$ è la *matrice moltiplicanda* e $\underline{\underline{B}}$ è la *matrice moltiplicatore*. Le due matrici sono *conformi* al prodotto se le colonne della prima matrice (*moltiplicanda*) sono uguali alle righe della seconda matrice (*moltiplicatore*). La matrice prodotto è una matrice che ha tante righe quante sono quelle della prima matrice e tante colonne quante sono quelle della seconda.

L'elemento generico $c_{ij}$ si ottiene dalla somma dei prodotti degli elementi della riga *i-esima* della prima matrice per la colonna *j-esima* della seconda (Fig. 11.1)

Il prodotto tra matrici gode della *proprietà associativa*

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} \times \underline{\underline{B}}$$

$$\begin{bmatrix}28&46\\8&28\\26&15\\22&29\\16&52\end{bmatrix} = \begin{array}{r} \\ \\ 3 \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix}8&1&5\\4&0&4\\-5&7&-2\\2&3&2\\1&4&6\end{bmatrix} \times \begin{array}{c}\begin{bmatrix}4&2\\6&5\\-2&5\end{bmatrix}\\ 1 \end{array}$$

$$c_{31} = \begin{bmatrix}-5\\7\\-2\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}4\\6\\-2\end{bmatrix} \qquad \begin{array}{r}-20+\\42+\\4\\\hline 26\end{array}$$

**Fig. 11.1**

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{D}} = (\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}) \cdot (\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{D}})$$

gode della *proprietà distributiva*

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} + \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{C}} + \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{C}} + \underline{\underline{D}})$$

ma non gode della *proprietà commutativa*, cioè

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \neq \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}$$

pertanto, quando si eseguono dei prodotti, occorre sempre prestare attenzione a non scambiare mai l'ordine delle varie matrici.

Inoltre, la *trasposta di un prodotto* di matrici è uguale al prodotto *delle trasposte* delle singole matrici con ordine scambiato

$$(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{D}})^T = \underline{\underline{D}}^T \cdot \underline{\underline{C}}^T \cdot \underline{\underline{B}}^T \cdot \underline{\underline{A}}^T$$

### *1.3.6 Divisione di matrici*

Date due matrici $\underline{\underline{A}}$ e $\underline{\underline{B}}$, il loro quoziente potrebbe indicarsi con

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} / \underline{\underline{B}}$$

Dove $\underline{\underline{C}}$ è la *matrice quoziente,* $\underline{\underline{A}}$ è la *matrice dividenda* e $\underline{\underline{B}}$ è la *matrice divisore*. Ricordando la divisione tra numeri, si può scrivere

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} / \boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{a} \cdot \frac{1}{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}^{-1}$$

cioè il quoziente di due numeri si può indicare come prodotto del dividendo per l'inverso del divisore. Orbene, nell'ambito dell'algebra delle matrici, viene sempre adoperato questo formalismo, per cui il quoziente di due matrici si esprime sempre come prodotto della matrice dividenda per l'inversa della matrice divisore

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}^{-1}$$

La prima conformità che deve essere rispettata è quella che riguarda il prodotto $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}^{-1}$: le colonne della prima matrice devono essere uguali alle righe della seconda.